AHP における一対比較値の緩和な整合性指標について(不確実性を含む意思決定の数理とその応用)

田中, 浩光

数理解析研究所講究録
第1548巻 2007年 122-129

AHPにおける一対比較値の緩和な整合性指標について

愛知学院大学経営学部　田中　浩光(Hiromitsu Tanaka)
Faculty of Management,
Aichi-Gakuin University

1．はじめに

AHP (Analytic Hierarchy Process) は、Thomas L,Saaty(以下、サーティ)によって提案された意思決定法である。AHP では人間の主観的評価を、より合理的に捉えることを意図して、最終目的、評価項目、代替案を３水準として階層的に配置する。評価方法として、評価項目間、代替案間の相対比較に一対比較法が用いられる。

本稿では、一対比較値からなる行列（以下、一対比較値行列）に対する代表的な解法である固有値法について、整合性の問題を取り扱う。サーティは整合性を測る指標として C.I. (Consistency Index) を推奨している。一対比較値行列の各要素である評点付け(scoring)は AHP の実施手順での基本的な作業単位である。評点付けの過程では、評価の際に生じるバラツキに加えて、比尺度化、離散化、逆数対称化など AHP 方式に依拠する偏りを含む。実践では、一対比較値行列の妥当性を得るため、その点検方法として整合性指標である C.I.基準が用いられる。しかし、C.I.の基準値となるサーティの整合性が理想的な等式である推移則の成立を問うものであり、C.I.は、大きなバラツキがある一対比較値に対し、方向性のない全方向に対する乖離を示す整合性指標である。C.I.の性能については、整合度関数としての性質、他基準との関係など、多くの研究がなされている(仁科・柴山(1992)、西澤(2000),加藤・小澤(2000),小澤(2004)など)。とくに、小澤(2004)は C.I.に基づく整合性を満たす一対比較値の存在における関係式を与えている。この関係式に基づき、田中(2005)は、整合性を満たす一対比較値の範囲を具体的に求め、非常に狭いことを示唆している。本稿では、サーティの整合性を緩和する視点に立ち、一対比較値行列を点検する１つの整合指標を提示する。文献例を含む数値例を通して、その有用性を診る。

第２節では、AHP の実施手順において、その中核となる一対比較法を紹介し、併せて固有値法の要約を与える。評点過程が一対比較値に及ぼす影響についても言及する。第３節では、AHP 方式の根幹である比尺度性とサーティの整合性指標の関係を説明する。第４節では、一対比較値行列を有向グラフとして捉えることで、整合性の問題を評点の配置に基づく項目間の順序性の問題として考える。一対比較値行列は巡回有向グラフと非巡回有向グラフに分けて考察･吟味される。第５節では、比較対象の項目数に関係なく、３項目を基本単位として、一対比較値の整合性の問題を考察する。一対比較値の存在範囲を広げることを意図し、サーティの整合性を緩める視点から、新たに整合性指標を提案し、その性質を確認する。第６節では、文献例を含む４個の数値例を用意する。そこでは、C.I 基準を対照として、 新しい整合性指標の有用性が吟味される。第 7 節の「おわりに」では、提示する整合性指標の実践での適用可能性について言及する。

2.一対比較値と固有値法

比較対象であるn項目に対する一対比較では、下記の手順で一対比較値行列Aを得る。

① 最初に、項目対をとりあげる。

② 次いで、重要度の大きい項目を行に対応させて、正の整数値（1〜9）を与える。
対称の非対角要素に、その逆数を与える。

$A = \{a_{ij}\}$

ここに、$i,j = 1,\cdot\cdot\cdot,n$ に対し、

$$a_{ij}^{-1} = a_{ji} \quad ,a_{ii} = 1 \tag{1}$$

$$\max\{a_{ij}, a_{ji}\} \in \{1,\cdot\cdot\cdot,9\} \tag{2}$$

評点 a_{ij} は、逆数対称化(1)、離散化(2)の縛りを受けることに留意する。AHP 方式に付随する制約以外にも、評点 a_{ij} には、評点化に際し、過大・過小見積もりの偏り、一対比較の試行の順序に起因するバラツキなど様々な撹乱要因を含む。

定式化では、比較対象のn項目に対し、真の重要度ベクトル $W=\{w_i\}$を想定することで、評点生成の誤差モデルを導入することができる。

$$\begin{aligned} a_{ij} &= f_0(W, \varepsilon) \\ &\fallingdotseq f_1(w_i, w_j, \varepsilon_{ij}) \\ &\cdot\cdot\cdot \\ &\fallingdotseq (w_i / w_j)\cdot \varepsilon_i \end{aligned} \tag{3}$$

ここに、$\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$は誤差であり、$f_0$, f_1はそれぞれ未知関数である。

本稿では、重要度の推定問題として代表的な固有値法をとりあげる。

〔固有値法〕。

$$AU_{max} = \lambda_{max}\cdot U_{max} \tag{4}$$

ここに、λ_{max} : A の最大固有値、U_{max} : λ_{max}に対応する主固有ベクトル、$U_{max} = \{u_i\}$。
固有値法で求められた u_iを重要度w_iの推定値とする。

下記に、固有値法を支える事項が要約される。

①尺度性のみ成立する理想条件下では、固有値法では、$\lambda_{max} \rightarrow n$, $U_{max} \rightarrow W$。

②固有ベクトル解は順位保存性を有する。すなわち、あるステップ以降の比較順位が保存される(仁科・柴山(1992))。

③過剰評価率の最小化問題として定式化される(関谷(2000)。

以降、重要度w_iの推定に対する評価には、評点数も少なく、評点のバラツキも大きいことから統計基準は馴染まないため、評点である一対比較値の配置の状況に留意する。本稿では、評価基準として、項目間の順序性の保持を採用する。

3．比例性とサーティの整合性指標 C.I.

本節では、離散化については考慮せず、一対比較値の評点に大きな影響を及ぼす比尺度性(以下、比例性)に着目し、サーティの整合性指標との関係を考察する。最初に、比例性、サーティの整合性の定義を与えて、相互の関係について調べる。

〔比例性〕

誤差モデル(3)のもとで、

$$a_{ij} = w_i / w_j \tag{5}$$

すなわち,

$$\varepsilon_{ij} = 1, \qquad ; \quad i,j = 1, \cdot\cdot\cdot n.$$

が成立するとき、A は比例性を有するとする。

〔サーティの整合性〕

n≧3　のとき、一対比較行列 A が式(6)を満たすとき、

$$a_{ij} = a_{ik} \times a_{kj}, \qquad ; \quad i,j,k = 1, \cdot\cdot\cdot n. \tag{6}$$

A は、サーティの整合性を有するとする。

〔サーティの整合性指標 C.I.〕

C.I.(Consistency Index)は、サーティの整合性指標として知られ、次式で与えられる。

$$\mathrm{C.I.} = (\lambda_{max} - 1) / (n-1) \tag{7}$$

ここに、

$$\lambda_{max} = n + \Sigma\Sigma(u_i - a_{ij} u_j)^2 / [a_{ij} u_i u_j] \tag{8}$$

$$\lambda_{max} \geqq n \quad (\text{等号は、} a_{ij} = u_i / u_j) \tag{9}$$

また、相対残差を

$$e_{ij} = a_{ij} / (u_i / u_j) \tag{10}$$

と表すとき、

$$\mathrm{C.I.} = \Sigma\Sigma(e_{ij} - 1) / \{n(n-1)\} \tag{11}$$

を得る（仁科・柴山(1992)）。式(11)の分子に注目するとき、C.I.は真の比例性のもと、相対残差の方向性のない全方向の乖離を表すと解釈できる(田中(2005))。

〔事実 1〕

比例性はサーティの整合性を導く、すなわち、式(5)が式(6)を導く。

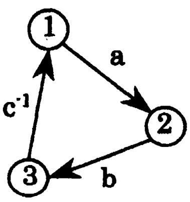
証明；自明である。

因みに、AHP 方式に依拠する逆数対称性も比例性から導かれることは、容易である。

4．整合性と有向グラフ

本稿では、一対比較値の整合性の問題を、評点の配置に基づいて考察する。とくに、整合性を満たす一対比較の存在範囲について吟味する。以降では、議論を簡明にするため、項目を点とし、評点を枝とする有向グラフを考える。整合性の点検に際しては、有向グラフは巡回有向グラフと非巡回有向グラフに分けられる（西澤(2000)）。小澤(2004)は、(巡回、非巡回)有向グラフとなる一対比較行列をとりあげて、C.I.に基づく整合性基準(< 0.1、あるいは< 0.15)を満たす関係を与え、存在範囲が狭いことを示唆している(図１,図２)。さらに、a_{ij} には(有限値の)離散化というAHP 方式に依拠する付加的要請が課されていることにより、C.I.基準による整合性を満たす一対比較値の存在範囲は、より狭いと予想される。田中(2005)は、具体的に３項目からなる一対比較値の存在範囲を与え、狭いことを示している(表１,表２)。以下、n=3 の場合をとりあげる。表１、表２ではC.I.基準が採用され、サーティが推奨する経験則(< 0.1、あるいは< 0.15)である整合性を満たす項目の組（①,②,③）の評点が与えられる。小澤(2004)の結果を下記に整理する。

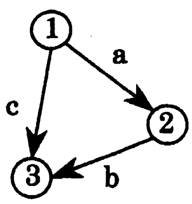
・巡回有向グラフの場合（図１）



C.I.≦0.1　→　$ab/c^{-1} \leqq 3.78$

C.I.≦0.15　→　$ab/c^{-1} \leqq 5.07$

・非巡回有向グラフの場合（図２）



C.I.≦0.1　→　$ab/c \leqq 3.78$

C.I.≦0.15　→　$ab/c \leqq 5.07$

表１　整合性を有するときの上限c値

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5＼3	1	1	−	−	−	−	−	−
2	2	1＼−	−	−	−	−	−	−	−
3	1	−	−	−	−	−	−	−	−
4	1	−	−	−	−	−	−	−	−
5	1	−	−	−	−	−	−	−	−
6	−	−	−	−	−	−	−	−	−
7	−	−	−	−	−	−	−	−	−
8	−	−	−	−	−	−	−	−	−
9	−	−	−	−	−	−	−	−	−

表２　整合性を有するときの下限c値

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	2	2	2	2	3	3
2	1	1＼2	2	3	3	4	4	5	5
3	1	2	2＼3	4	4	5	6	7	8
4	1	2	3	4＼5	6	7	8	9	−
5	1	2	3	4	5＼7	8	−	−	−
6	2	3	4	5	6	8＼−	−	−	−
7	2	3	5	6	7	9	−	−	−
8	2	4	5	7	8	−	−	−	−
9	2	4	6	8	9	−	−	−	−

以上の結果から、サーティの整合性を緩和することが必要となる。

5．緩和な整合性指標

比較対象の項目数に依存せず、点検対象の項目数は3とし、項目の組(i,j,k)を基本単位とする。本節では、前節までの考察に基づき、AHP 方式に依拠する比例性と離散化の影響の大きさを考慮して、その影響を緩和する視点から、1つの新しい整合性指標を提示する。巡回有向グラフの場合と、非巡回有向グラフの場合に分けて提示する。巡回有向グラフの場合は、評点の配置に関係なく、C.I.が大きくなる。提示(1)は、評点化の際のバラツキに対し、ある程度の許容を意味する。

(1)巡回有向グラフの場合

$$3 \geqq \max(a_{ij}, a_{ik}, a_{kj})$$

(2)非巡回有向グラフの場合

$$a_{ij} \geqq \max(a_{ik}, a_{kj})$$

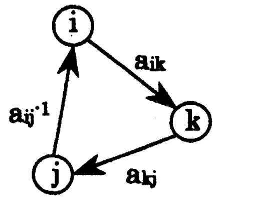


図3．巡回有向グラフ

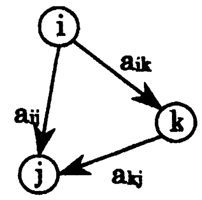


図4．非巡回有向グラフ

以下、提示する指標(2)がサーティの整合性の式(6)を緩和することを次の2点で確認する。(ⅱ)については、非巡回有向グラフの場合のみを考察する。

（ｉ）整合性を満たす範囲を確認する。

（ⅱ）(a_{ij} ,a_{ik} ,a_{kj})の緩和する領域は、サーティの整合性基準の領域を包含する。

（ｉ)については、図3 ,図4に、提示指標の存在領域を与えることで、視察から、図1 ,図2と比較して明らかに広いことが読み取れる。ここに、表3の右上側非対角要素の数値は、巡回有向グラフの場合の基準(1)の場合、左下側非対角要素の数値は、非巡回有向グラフの場合の基準(2)の場合の a_{ij} である。また、対角要素内の上側、下側の数値も同様である。表の行、列の数値(1~9)は、それぞれ a_{ik} , a_{kj} である。

表3　緩和な整合性を有するときの a_{ij} 値

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1＼3	3	3	—	—	—	—	—	—
2	2	2＼3	3	—	—	—	—	—	—
3	3	3	3	—	—	—	—	—	—
4	4	4	4	4＼—	—	—	—	—	—
5	5	5	5	5	5＼—	—	—	—	—
6	6	6	6	6	6	6＼—	—	—	—
7	7	7	7	7	7	7	7＼—	—	—
8	8	8	8	8	8	8	8	8＼—	—
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9＼—

（ⅱ)については、次の事実2を証明すればよい。

〔事実2〕

式(6)が成立するときは、式(13)が成立する。

証明：非巡回有向グラフより、

$a_{ij} \geqq 1$, $a_{ik} \geqq 1$, $a_{kj} \geqq 1$.

また、$\max(a_{ik}, a_{kj}) = a_{max}$ とおくと、

$a_{ij} - \max(a_{ik}, a_{kj}) = a_{ik} \cdot a_{kj} - a_{max}$

いま、便宜的に $a_{max} = a_{ik}$ とおいても一般性は失わない。

$a_{ij} - \max(a_{ik}, a_{kj}) = a_{max}(a_{kj} - 1) \geqq 0$

6. 数値例の解剖

本節では、５節で提示する整合性指標を、一対比較値行列の数値例である文献例と人工例をとりあげて、サーティの整合性指標 C.I. を対照として評価する。全数値例を通して、整合性を診る評価としては、評点付けされた一対比較値に基づき、項目間の順序の保持を採用する。すなわち、推移則の近似的成立の有無については、C.I.値が 0.15、あるいは 0.1 の経験則を対照に採用する。また、４節・５節で言及したが、一対比較値行列での評点の配置が巡回有向グラフ、あるいは非巡回有向グラフのいずれかに応じて、整合度への影響が異なる。数値例では、４例を用意する。文献の例は、西澤(2000)をとりあげる。非巡回有向グラフであり、評点の配置では項目間に順序が成立する。他の 3 例(例 2, 例 3,例 4)は、本稿で用いられる人工例である。例２は例 1 の西澤(2000)で、$a_{23}=8 \rightarrow a_{23}=7$ に変更し、C.I.基準では説明できないことを示す例として用意されたものである。

各例では、基本単位の３項目に対し、一対比較値行列が有向グラフとしてみなされる。また、整合性の点検の結果が表に整理される。表では、３項目(x,y,z)に対し、評点の組(a,b,c)は(a_{xy},a_{yz},a_{xz})を表す。固有値法に基づき、最大固有値、対応する主固有ベクトル、そして C.I.が算出され、提示する緩和条件の成立の有無が○、×で表示される。C.I.基準で**,*は、≧0.15、≧0.1 を意味する。

例１．非巡回有向グラフ：西澤(2000)

項目数が４の非巡回有向グラフをとりあげる(図５)。一対比較の評点の配置により、項目間の順序として、①→②→③→④ を得る。このとき、最大固有値 と C.I.は、λ_{max} ＝ 4.454、C.I. ＝ 0.151 （ ＞ 0.15 ）を得る。したがって、C.I.基準では、整合性がギリギリのところで認められないことになる。一方、固有ベクトルの重みでは、①→②→③→④ を得ている。

3 項目を基本単位として評点の組み合わせ(a,b,c)を点検する(表４)。C.I.基準では、項目の組(①,②,④)と (①,③,④) で整合性が認められない。緩和条件では、項目の組(①,②,④)のみがギリギリのところで認められないことになる。

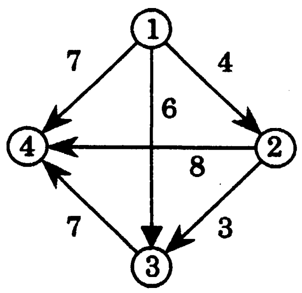


図５．非巡回有向グラフ；西沢 (2006)

表４　組合せ(a, b, c)における緩和状況

項目 評点	最大固有値 C.I.	重み	緩和条件
(1, 2, 3) ⇒(4, 3, 6)	3.054 0.027	0.691 0.218　0.091	非巡回　○
(1, 2, 4) ⇒(4, 8, 7)	3.262 0.131*	0.666 0.276　0.057	非巡回　×
(1, 3, 4) ⇒(6, 7, 7)	3.367 0.184**	0.724 0.219　0.057	非巡回　○
(2, 3, 4) ⇒(3, 7, 8)	3.177 0.090	0.684 0.260　0.056	非巡回　○

例２．非巡回有向グラフ

項目数が４の非巡回有向グラフをとりあげる(図６)。一対比較の評点の配置により、項目間の順序として、①→②→③→④ を得る。このとき、最大固有値 と C.I.は、それぞれ

λ_{max} ＝ 4.515、C.I. ＝ 0.172 （ ＞ 0.15 ）.

を得る。したがって、C.I.基準では、整合性が認められないことになる。一方、固有ベクトルの重み

では、①→②→③→④　を得ている。

3項目を基本単位として点検する(表5)。C.I.基準では、項目の組(①,②,④)と（①,③,④）で整合性が認められない。緩和条件では、全ての項目の組が整合性を認められることになる。

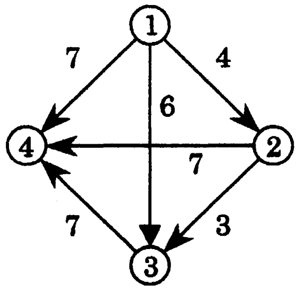


図6．非巡回有向グラフ

表5　組合せ(a, b, c)における緩和状況

項目 評点	最大固有値 C.I.	重み	緩和条件
(1, 2, 3) ⇒(4, 3, 6)	3.054 0.027	0.691 0.218　0.091	非巡回　○
(1, 2, 4) ⇒(4, 7, 7)	3.217 0.109*	0.673 0.267　0.061	非巡回　○
(1, 3, 4) ⇒(6, 7, 7)	3.367 0.184**	0.724 0.219　0.057	非巡回　○
(2, 3, 4) ⇒(3, 7, 7)	3.136 0.068	0.633 0.304　0.063	非巡回　○

例3．評点の上限を含む場合

項目数が4の非巡回有向グラフをとりあげる(図7)。一対比較の評点の配置により、項目間の順序として、①→②→③→④　を得る。このとき、最大固有値　とC.I.は、それぞれ

λ_{max} ＝ 4.718、C.I. ＝ 0.239 （ ＞ 0.15 ）.

を得る。したがって、C.I.基準では、整合性が認められないことになる。一方、固有ベクトルの重みでは、①→②→(③,④)　を得ている。

3項目を基本単位として点検する(表6)。C.I.基準では、項目の組(①,②,③)と（①,②,④）で整合性が認められない。緩和条件では、全ての項目の組が整合性を認められることになる。

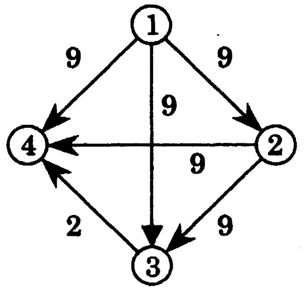


図7．評点の上限を含む例

表6　評点の上限を含む例の緩和状況

項目 評点	最大固有値 C.I.	重み	緩和条件
(1, 2, 3) ⇒(9, 9, 9)	3.561 0.280**	0.778 0.180　0.042	非巡回　○
(1, 2, 4) ⇒(9, 9, 9)	3.561 0.280**	0.778 0.180　0.042	非巡回　×
(1, 3, 4) ⇒(9, 2, 9)	3.054 0.027	0.814 0.114　0.072	非巡回　○
(2, 3, 4) ⇒(9, 2, 9)	3.054 0.027	0.814 0.114　0.072	非巡回　○

例4、巡回有向グラフを含む場合

項目数が4の有向グラフをとりあげる(図8)。一対比較の評点の配置により、項目間の順序として、①→（②,③,④）を得る。このとき、最大固有値　とC.I.は、それぞれ

λ_{max} ＝ 4.821、C.I. ＝ 0.274 （ ＞ 0.15 ）.

を得る。したがって、C.I.基準では、整合性が認められないことになる。一方、固有ベクトルの重みでは、①→(③,④)→②　を得ている。

3項目を基本単位として点検する(表7)。C.I.基準では、項目の組(①,②,④)と（②,③,④）で整合性が認められない。緩和条件では、項目の組(①,②,③)を除き、他の3組の整合性が認められない。

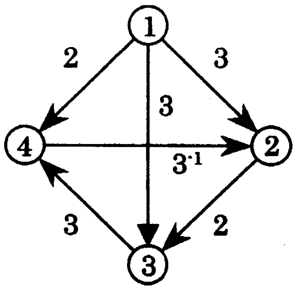


図８．巡回有向グラフを含む例

表７　巡回有向グラフを含む例の緩和状況

項目 評点	最大固有値 C.I.	重み	緩和条件
(1, 2, 3) ⇒(3, 2, 2)	3.054 0.027	0.594 0.249　0.157	非巡回　×
(1, 2, 4) ⇒(3, 1/3, 2)	3.054 0.027	0.527 0.140　0.333	非巡回　○
(1, 3, 4) ⇒(3, 3, 2)	3.257 0.128*	0.540 0.297　0.163	非巡回　×
(2, 3, 4) ⇒(2, 3, 1/3)	4.002 0.501**	0.289 0.379　0.331	非巡回　○

７．おわりに

AHP の適用においては、一対比較値行列の作成の際、評点付けに伴う多くの難題が生じる。原因を探り、取り除くことは、評点者の主観的な要素に結びつく様々な攪乱要因が混入しているため、実践的でなく、また困難と思われる。このとき、整合度関数を活用し、奇異な評点付けの位置を見出すことは、再度の評点付けを可能にするだけでなく、直面する研究主題に対し、見直しの好機となる。その意味で、実践的な対処の１つとして、方向性のない診断指標であるサーティの整合性指標 C.I.を第１選択とし、提示する緩和指標を第２選択に用いることが望まれる。

参考文献

(1)Saaty,T.L.(1980).The Analytic Hierarchy Process,McGraw Hill.,New YorK.
(2)仁科健、柴山忠雄(1992).一対比較における固有ベクトル法と対数最小二乗法の比較、22,2,115-123.
(3)Sekitani,K. and Yamaki,N.(2004).A logical interpretation for eigenvalue method
in AHP..Journal of the Operations Research Society of Japan,Vol.42,No.1,59-77.
(4)加藤豊、小澤正典(2000). AHP における一対比較の整合性の評価、日本 OR学会春季研究発表会アブストラクト集、106-107.
(5)西澤一友(2000).整合性の評価と改善、木下編「AHP の理論と実際」、日科技連、105−116.
(6)関谷和之(2000).AHP と固有値問題、木下編「AHP の理論と実際」、日科技連、160−182.
(7)小澤正典(2004). AHP における整合度 C.I 値の意味と解釈、OR学会部会「AHP の世界」資料.(2004.9.24).
(8)田中浩光(2005).AHP における一対比較データの整合性について、OR学会部会「不確実性理論の経営科学のへの応用」資料.(2005.12.23).
(8)田中浩光(2006).AHP における C.I.の解釈、日本OR学会春季研究発表会アブストラクト集.

田中　浩光
愛知学院大学経営学部
〒470-0195　愛知県日進市岩崎町阿良池 12
E-mail: htanaka@dpc.aichi-gakuin.ac.jp